

## ЛЕКЦИЯ № 27

### Твердое тело и его описание.

До сих пор мы в основном рассматривали динамику *материальных точек*, т.е. объектов, линейными размерами которых можно было пренебречь по сравнению с расстояниями между ними. При этом размер материальной точки считался равным нулю, хотя ее масса – конечной. Всякой внутренней динамикой этого объекта мы также пренебрегали, и характеризовали материальную точку только тремя декартовыми координатами. Планеты в небесной механике в рамках задачи Кеплера можно считать материальными точками. Но при рассмотрении, например, Земли и Луны это лишь первое приближение. На этих масштабах необходимо учитывать конечность размеров Земли, ее вращение и изменение формы из-за приливных процессов. В этом смысле, если учесть конечность размеров, но не учитывать изменение геометрии, то можно говорить о Земле, как о *твердом теле* в смысле механики. С другой стороны, в *физике твердого тела* часто размер предмета не имеет особо значения, но важна его внутренняя структура, возможность ее изменения и распространения в образце волн различного типа. Поэтому в физике твердого тела оно обладает бесконечным числом степеней свободы. В противоположность этому в *механике твердого тела* считается, что все атомы, из которых оно состоит, связаны бесконечно жесткими связями. Поэтому оно не меняет своей формы и внутренней структуры. Рассматривать такое твердое тело можно двояко. Во-первых, можно помнить, что оно состоит из большого числа точек, связанных связями. При этом мы можем воспользоваться всем аппаратом механики системы материальных точек со связями, т.е. уравнениями механики. С другой стороны, твердое тело можно рассматривать, как сплошную среду со средней плотностью. При этом мы можем использовать небольшое число обобщенных координат, характеризующих положение твердого тела. Но необходимо совершить переход от динамических уравнений большого числа материальных точек в декартовых координатах к небольшому числу уравнений для обобщенных координат.

Прежде всего, выясним, сколько обобщенных координат полностью описывают состояние твердого тела. Если зафиксировать точку (точка *A* на Рис.27а) с тремя декартовыми координатами в твердом теле, то остается возможность вращения тела вокруг этой точки в трех направлениях. Если зафиксировать еще одну точку (*B* на Рис.27b), то остается возможность

вращения вокруг отрезка  $AB$ . Наконец, если зафиксировать еще одну точку ( $C$  на Рис.27с), то возникший треугольник полностью фиксирует положение тела в пространстве. Из 9 декартовых координат трех точек с исключением 3 связей мы получаем оставшихся 6 обобщенных координат, характеризующих положение тела.

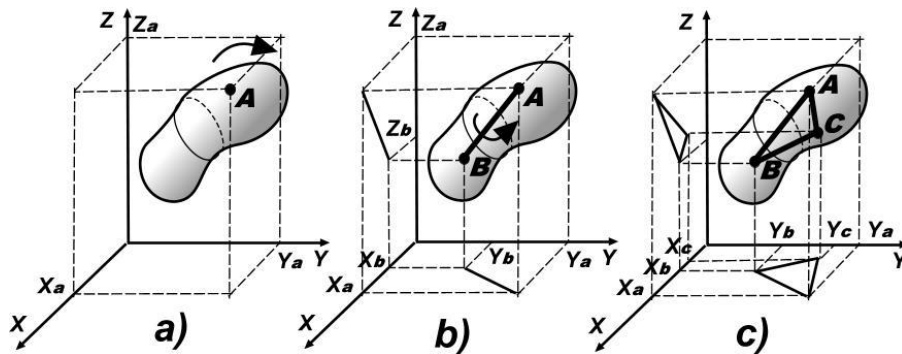


Рис.27.1

В качестве трех координат удобно выбрать три декартовы координаты какой-нибудь точки  $(X, Y, Z)$ , жестко зафиксированной в теле. В эту точку помещается своя локальная система декартовых координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , также жестко зафиксированная в среде (Рис.27.2).

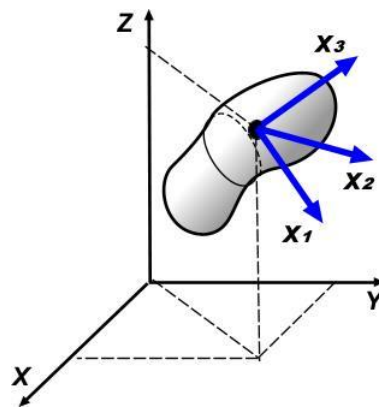


Рис.27.2

Выбор точки начала локальной системы координат, вообще говоря, произволен, и направление осей в ней относительно твердого тела произволен. Однако, как мы увидим позже, есть «удобная» точка расположения начала координат и «удобные» направления осей. Положение осей локальной системы относительно лабораторной системы характеризуется тремя углами, в качестве которых удобно выбрать т.н. *углы Эйлера*.

Для их введения сделаем такие процедуры. Вначале расположим оси локальной системы параллельно осям лабораторной системы:  $\vec{X} \parallel \vec{x}_1$ ,  $\vec{Y} \parallel \vec{x}_2$  и  $\vec{Z} \parallel \vec{x}_3$  (Рис.27.3а).

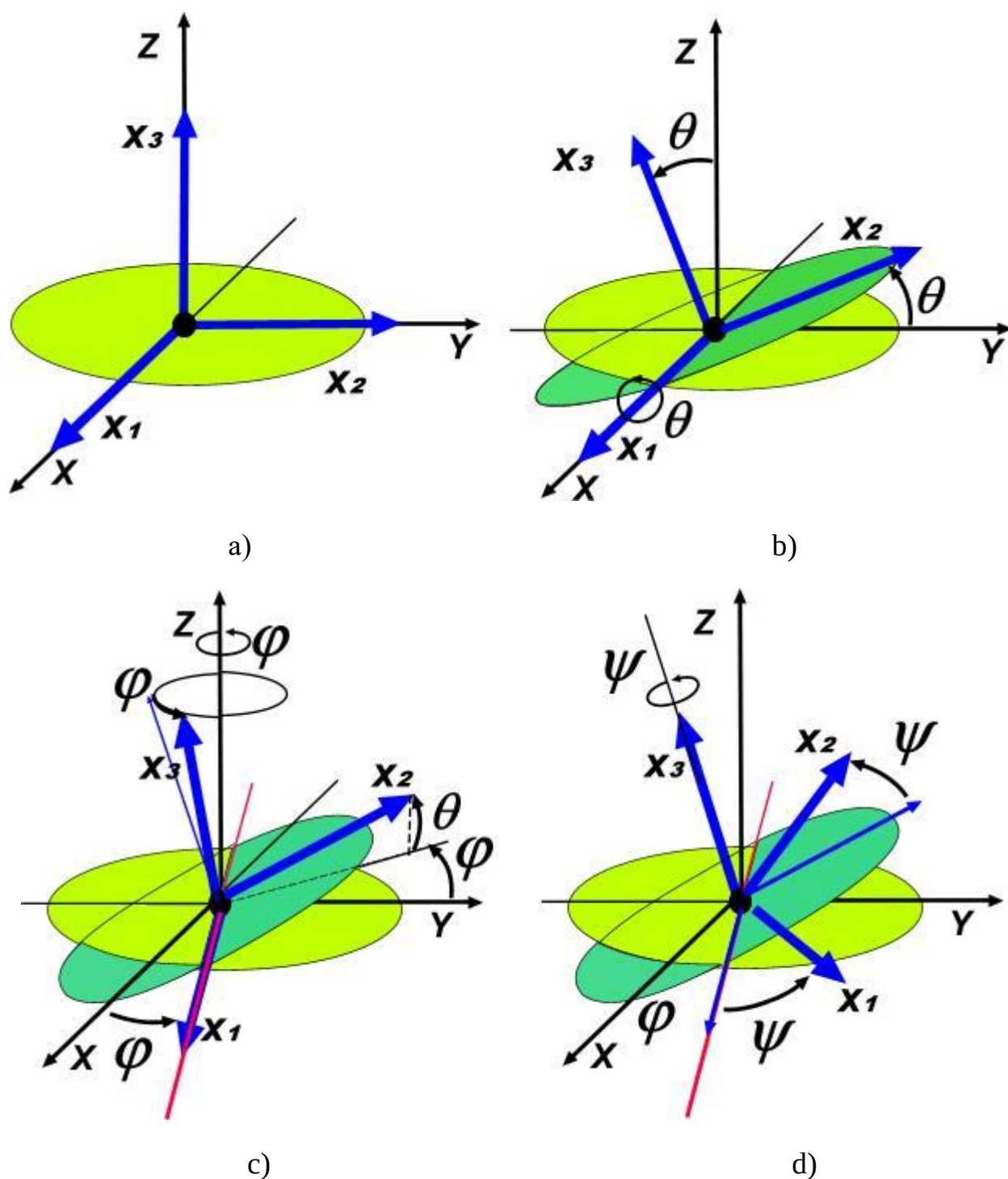


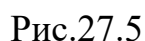
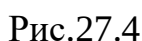
Рис.27.3

На первом шаге повернем локальную систему вокруг оси  $\vec{X} \parallel \vec{x}_1$  на угол  $\theta$  (Рис. 27.3b). При этом оси  $\vec{x}_2$  и  $\vec{x}_3$  повернутся от осей  $\vec{Y}$  и  $\vec{Z}$

На втором шаге повернем локальную систему вокруг оси  $\vec{Z}$  на угол  $\varphi$  (Рис.23.3с). При этом ось  $\vec{x}_1$  повернется в плоскости  $(\vec{X}\vec{Y})$  на угол  $\varphi$ , а локальная ось  $\vec{x}_3$  повернется вокруг оси  $\vec{Z}$  на угол  $\varphi$  по конусу с раствором  $\theta$ . Плоскости  $(\vec{x}_1\vec{x}_2)$  и  $(\vec{X}\vec{Y})$  пересекаются теперь по линии, вдоль которой направлена ось  $\vec{x}_1$ , и которая называется *линией узлов*.

Таким образом, положение твердого тела в пространстве полностью определяется заданием трех декартовых координат  $(X_0, Y_0, Z_0)$  центра связанной с ним локальной координатной системы и тремя углами Эйлера  $(\theta, \varphi, \psi)$  направлений осей локальной системы координат относительно исходной (лабораторной) системы.

Если рассматривать твердое тело, как совокупность материальных точек, то можно исходить из лагранжиана для них и уравнений, следующих из лагранжиана. Удобство лагранжевого подхода заключается в том, что все связи, образующие из системы точек твердое тело, можно учесть на уровне лагранжиана. Надо учесть, что при параллельном переносе тела все его координаты меняются синхронно с изменением координаты центра локальной системы координат на одну величину, а при вращении тела все точки вращаются синхронно на один и тот же угол. Поскольку динамика тела зависит от его геометрии и распределения плотности в нем, то естественно перейти из лабораторной системы отсчета  $K_0$  в систему  $K$ , связанную с твердым телом (см. Рис.27.4).



Выберем центр локальной системы координат в точке  $O$ , с координатой  $\vec{R}$  в лабораторной системе отсчета  $K_0$ . Если координата произвольной точки твердого тела в локальной системе отсчета равна  $\vec{r}$ , то в лабораторной системе  $K_0$  она равна  $\vec{r}_0 = \vec{r} + \vec{R}$ . На первом шаге проведем параллельный сдвиг всего тела. При этом все точки в лабораторной системе сдвинутся на вектор  $\delta\vec{r}_0 = \delta\vec{R}$ , равный сдвигу центра локальной системы координат (Рис.27.5). На втором шаге при неподвижном центре локальной системы  $O$  повернем тело (вместе с ее осями координат) вокруг **оси вращения** (оси  $\vec{\Omega}$  на Рис.27.6) на угол  $\delta\vec{\varphi}$ . Это – вектор, равный по величине  $\delta\varphi$  и направленный вдоль оси поворота  $\vec{\Omega}$ . При этом точка в теле с координатой  $\vec{r}$  проворачивается вокруг оси вращения на угол  $\delta\varphi$  и на вектор  $[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]$  при малом  $\delta\varphi$  (см. лекцию об угловом моменте) – Рис.27.6. Таким образом полный сдвиг точки твердого тела в лабораторной системе отсчета равен

$$\delta\vec{r}_0 = \delta\vec{R}(t) + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]. \quad (27.1)$$

Разделив это на  $\delta t$  – время сдвига, получим

$$\vec{v} = \vec{V}(t) + [\vec{\Omega}(t), \vec{r}], \quad (27.2)$$

где  $\vec{\Omega}(t)$  – угловая скорость вращения тела, а  $\vec{V}(t)$  – скорость его поступательного движения. Заметим, что ось вращения меняется со временем даже в простом случае свободного вращения тела. **Соотношение (27.2) является основным в динамике твердого тела**, из которого вытекают все последующие результаты. Формула (27.2) вместе с формулой

$$\vec{r}_0 = \vec{R}(t) + \vec{r} \quad (27.3)$$

задают связь координат и скоростей всей совокупности точек твердого тела в лабораторной системе  $(\vec{r}_{i0}, \vec{v}_i)$  с 6 обобщенными координатами  $(\vec{R}, \vec{\varphi})$  и координатами  $(\vec{r}_i)$  в твердом теле. (Под величиной  $\vec{\varphi}$  подразумеваются три угла поворота, например, эйлеровы углы). В лагранжевом подходе можно совершить переход от  $(\vec{r}_{i0}, \vec{v}_i)$  к  $(\vec{R}, \vec{\varphi})$  в лагранжиане и проинтегрировать систему по всем точкам тела, получив эффективный лагранжиан и уравнения для обобщенных координат твердого тела.

Выбор центра локальной координатной системы и направления векторов этой системы произволен, но имеется предпочтительный выбор. Во-

первых, центр координатной системы удобно выбирать в точке расположения центра инерции твердого тела, координата которой равна

$$\vec{R} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dv / M \quad (27.4)$$

при рассмотрении дискретной и непрерывной сред, где  $\rho(\vec{r})$  – плотность и  $M$  – полная масса. При таком выборе отделяется кинетическая энергия поступательного движения

$$E = MV^2 / 2 + E_{in}, \quad E_{in} = U(\vec{R}, \vec{\phi}) + E_{rot}(\vec{\Omega}, \vec{\phi}), \quad (27.5)$$

где внутренняя энергия  $E_{in}$  содержит потенциальную энергию и кинетическую энергию вращения. Обратим внимание на то, что потенциальная энергия зависит от угловых переменных (например, при несимметричной форме и неоднородном распределении плотности). Кроме того, кинетическая энергия вращения зависит не только от угловой скорости, но и от угловых переменных. (Напомню, что при рассмотрении ранее перехода к обобщенным координатам в простых механических системах  $\sum m_i \dot{x}_i^2 / 2 \rightarrow \sum m_{ij}(q_s) \dot{q}_i \dot{q}_j / 2$ ). Аналогично, при рассмотрении вращения твердого тела в лагранжиане получаются биквадратные комбинации угловых скоростей  $\dot{\vec{\phi}}$  с коэффициентами, зависящими от самих  $\vec{\phi}$ .

Возвращаясь к формуле (27.5), мы видим, что в случае выбора начала координат в центре инерции скорость  $\vec{V}$  имеет «абсолютный» смысл. Посмотрим, что будет, если сместить центр локальной системы на вектор  $\vec{a}$  из точки  $O$  центра инерции в точку  $O'$  внутри твердого тела (Рис.27.7).

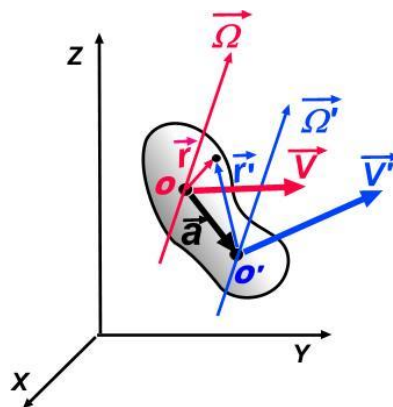


Рис.27.7

Рассмотрим произвольную точку с координатой  $\vec{r}$  в системе  $O$  и координатой  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$  в системе  $O'$ . Согласно (27.2) для этой точки в двух системах можно написать

$$\vec{v} = \vec{V}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}'], \quad \vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}'] + [\vec{\Omega}, \vec{a}]. \quad (27.6)$$

Вычитая одно из другого, получаем  $\vec{V}' - \vec{V} = [(\vec{\Omega}' - \vec{\Omega}), \vec{r}'] + [\vec{\Omega}, \vec{a}]$ . Поскольку это соотношение справедливо для любых  $\vec{r}'$ , то вычитая два соотношения с разными  $\vec{r}'$ , получаем

$$\vec{V}' = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{a}], \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega}. \quad (27.7)$$

Из этих соотношений видно, что при произвольном выборе центра локальной координатной системы скорость этого центра зависит от вращения системы, и в кинетической энергии перепутывается вращательный и поступательный вклад, в отличие от формулы (27.5). Если тело вращается с постоянной угловой скоростью, то точка  $O'$  будет вращаться с частотой  $\Omega$  по кругу вокруг точки  $O$  с круговой скоростью  $[\vec{\Omega}\vec{a}]$ . Во-вторых, видно, что *угловая скорость не зависит от выбора центра системы координат*, т.е. носит «абсолютный характер» и одинакова для всех точек вращающегося твердого тела.